CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR 1979

Epreuve de MATHEMATIQUES APPLIQUEES (durée 1 h 30)

Les parties II et III sont indépendantes de la partie I si on utilise l'expression de P donnée au I. 2.

L'utilisation d'une calculatrice est recommandée.

Préliminaire :

Dans le cours de l'épreuve on pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant (schéma de Hörner) :

Soit Q un polynôme $\left(Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n\right)$ et y un réel quelconque, on a l'identité :

$$Q(x) = (x - y)\,(\lambda_0 x^{n-1} + \lambda_1 x^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-1}) + \lambda_n.$$

les réels λ_i étant définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} \lambda_0 = a_0 \\ \lambda_i = a_i + y\,\lambda_{i-1} \qquad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Ceci permet donc d'une part de calculer facilement $Q(y) = \lambda_n$ et, d'autre part, si y est une racine de Q de trouver directement le quotient de Q par (x - y).

I. On considère une suite de polynômes (polynômes de Legendre) satisfaisant à la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = x \\ (n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1).x.P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \qquad \text{pour } n \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Déterminer successivement l'expression de P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 : on donnera les coefficients des P_i sous la forme de fractions irréductibles ou non.

2. Dans toute la suite P_6 sera désigné par P.

On vérifiera que $P(x) = \frac{1}{16}\left[231\,x^6 - 315\,x^4 + 105\,x^2 - 5\right]$

Calculer avec la meilleure précision possible (6 à 9 chiffres significatifs selon les possibilités de votre machine) une valeur approchée de la racine de P comprise entre 0,5 et 0,9.

On pourra utiliser la méthode de Lagrange (ou méthode des parties proportionnelles) ou (et) la méthode de Newton (ou méthode de la tangente), ou tout autre algorithme. Dans tous les cas, les candidats devront faire figurer sur leur copie quelques résultats partiels et expliquer en quelques mots leur méthode de calcul.

3. On appelle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 les racines de P classées par ordre décroissant (x_1 étant la plus grande, x_2 celle qui vient d'être calculée). En utilisant les relations entre coefficients et racines, déterminer les 6 racines de P en utilisant la valeur de x_2 trouvée au 2. et la valeur $x_1 = 0{,}932470$.

II. Les notations x_i et P ayant la même signification qu'au I., pour i entier compris entre 1 et 6 on pose :

$$H_i = \frac{1}{P'(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{(x - x_i)}\,dx$$ P' désigne la dérivée de P.

Calculer H_i en prenant toujours pour valeur approchée de x_i : $x_1 = 0{,}932470$

III. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\left[-1\ ,\ 1\right]$. On démontre que le réel J :

$$J = \sum_{i=1}^{i=6} H_i.f(x_i)$$ est une bonne approximation de I:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

1. On prend : $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

Calculer la valeur correspondante de J à partir des valeurs numériques suivantes : $H_5 = H_2 = 0{,}360762$

$H_4 = H_3 = 0{,}467914$

$H_6 = H_1$ valeur calculée au II.

2. Calculer la valeur exacte de I en utilisant une primitive ; comparer avec la valeur de J.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail